

顺从群作用的测度中心与极小吸引中心*

王丽娟, 周云华

(重庆大学数学与统计学院, 重庆 401331)

摘要: 研究顺从群作用的动力系统的测度中心和极小吸引中心。具体地, 首先给出了顺从群作用的动力系统的测度中心和极小吸引中心的定义, 然后证明了主要结论: 一个非空集合的测度中心与极小吸引中心相同。此结果是周作领所得结论在顺从群作用系统中的推广。

关键词: 测度中心; 极小吸引中心; 顺从群作用

中图分类号: O192 **文献标志码:** A **文章编号:** 0529-6579 (2016) 03-0052-03

Measure center and minimal contracting center for amenable group actions

WANG Lijuan, ZHOU Yunhua

(College of Mathematics and Statistics, Chongqing University, Chongqing 401331, China)

Abstract: The measure center and minimal contracting center for amenable group actions are investigated. More precisely, the definitions of the measure center and the minimal contracting center for amenable group actions are given firstly. Then the main result that the measure center of a nonempty set equals to its minimal contracting center is proven. It generalizes the conclusion of Zhou to amenable group actions.

Key words: measure center; minimal contracting center; amenable group action

设 G 是一个可数离散无限群, 记 $\mathcal{F}(G)$ 是 G 的有限子集全体构成集合。称 G 是顺从的, 若对任意 $\delta >$

0 及 $K \in \mathcal{F}(G)$, 存在 $F \in \mathcal{F}(G)$ 使得 $\frac{|F\Delta KF|}{|F|} < \delta$,

其中 $|\cdot|$ 为计数测度, $KF = \{kf; k \in K, f \in F\}$ 。特别地, 整数群 \mathbb{Z} 是顺从群。关于顺从群的更多性质, 可以参考文 [1]。

设 X 为一个度量空间, 称群 G 作用在 X 上成为一个动力系统 (简称 G -系统 (X, G)), 如果存在连续映射 $\Gamma: G \times X \rightarrow X, (g, x) \mapsto gx$ 满足

(i) $\Gamma(e_G, x) = x, \forall x \in X$; 这里 e_G 是 G 的单位元;

(ii) $\Gamma(g_1, \Gamma(g_2, x)) = \Gamma(g_1 g_2, x), \forall g_1, g_2 \in G, \forall x \in X$ 。

本文以下总假定 X 是带有距离 d 的紧度量空间, G 是可数离散顺从群并作用在 X 上形成一个动力系

统。关于顺从群作用动力系统的更多内容, 可以参考文 [2-4] 等。

1 预备知识及主要结果

首先回顾一下 $\mathcal{F}(G)$ 上实函数的一个极限定义。

给定 $F \in \mathcal{F}(G), \delta > 0$, 如果 $E \in \mathcal{F}(G)$ 满足 $|\{s \in E; Fs \subset E\}| > 1 - \delta|E|$, 则称 E 是 (F, δ) -不变的^[1,5]。给定函数 $\varphi: \mathcal{F}(G) \rightarrow \mathbf{R}$, 若存在 $L \in \mathbf{R}$ 满足 $\forall \varepsilon > 0, \exists F_0 \in \mathcal{F}(G), \delta > 0$ 使得对任意 (F_0, δ) -不变的 F , 有 $|\varphi(F) - L| < \varepsilon$, 则记

$$\lim_F \varphi(F) = L$$

下面我们再回顾 $\mathcal{F}(G)$ 上实函数上下极限的定义。

对 $F_1, F_2 \in \mathcal{F}(G)$ 及 $\delta_1, \delta_2 > 0$, 若 $F_1 \supseteq F_2$ 且 $\delta_1 \leq \delta_2$, 则记 $(F_1, \delta_1) > (F_2, \delta_2)$ 。令 $\Lambda = \{(F, \delta): F \in \mathcal{F}(G), \delta > 0\}$, 则 $(\Lambda, <)$ 是一个方向集。

* 收稿日期: 2015-07-07

基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (11471056)

作者简介: 王丽娟 (1990年生), 女; 研究方向: 拓扑动力系统; E-mail: dujuan645421351@163.com

令

$J(F, \delta) = \{E \in \mathcal{F}(G) : E \text{ 是 } (F, \delta) - \text{不变的}\}$
易知当 $(F_1, \delta_1) > (F_2, \delta_2)$ 时有 $J(F_1, \delta_1) \subseteq J(F_2, \delta_2)$ 。

给定函数 $\varphi : \mathcal{F}(G) \rightarrow \mathbf{R}$, 定义

$$\limsup_F \varphi(F) = \inf_{(F, \delta) \in A} \sup_{E \in J(F, \delta)} \{\varphi(E)\}$$

及

$$\liminf_F \varphi(F) = \sup_{(F, \delta) \in A} \inf_{E \in J(F, \delta)} \{\varphi(E)\}$$

容易看出,

$$\lim_F \varphi(F) = L \Leftrightarrow \limsup_F \varphi(F) = \liminf_F \varphi(F) = L$$

在给出 G -系统的测度中心和极小吸引中心的定义之前, 先作一些记号的约定。

$\mathfrak{B}(X)$ 表示 X 上的 Borel σ -代数。

$\mathcal{M}(X)$ 表示 X 上所有概率测度的集合。

$\mathcal{M}(X, G)$ 表示 X 上所有 G -不变概率测度的集合。即 $\mathcal{M}(X, G) = \{\mu \in \mathcal{M}(X) : \mu(g^{-1}B) = \mu(B), \forall B \in \mathfrak{B}(X), \forall g \in G\}$ 。

$\mathcal{M}^e(X, G)$ 表示 X 上所有 G -不变的遍历测度的集合。这里 $\mu \in \mathcal{M}(X, G)$ 称为遍历的^[6-7], 如果对任意 $B \in \mathfrak{B}(X)$ 有 $\lim_{g \in G} \mu(\cup_g B) = 0$ 或 1。

众所周知, $\mathcal{M}(X)$ 在弱*拓扑下是可度量紧凸空间, $\mathcal{M}(X, G)$ 是 $\mathcal{M}(X)$ 的紧致凸子集。

定义 1 设 $A \in \mathfrak{B}(X)$, χ_A 为 A 的特征函数, $x \in X$ 。设 $\varphi : \mathcal{F}(G) \rightarrow \mathbf{R}, F \mapsto \frac{1}{|F|} \sum_{g \in F} \chi_A(gx)$, 则若 $\lim_F \varphi(F)$ 存在, 记为 $P_x(A)$, 称为 x 进入 A 的概率; 否则, 分别记 $\bar{P}_x(A) = \limsup_F \varphi(F), \underline{P}_x(A) = \liminf_F \varphi(F)$ 为 x 进入 A 的上概率和下概率。

定义 2 设 $X_0 \subset X$ 非空, 子集合 $A \subset X$ 称为 X_0 的吸引中心, 如果

- (i) $\bar{A} = A$;
- (ii) $gA = A, \forall g \in G$;
- (iii) $P_x(v(A, \varepsilon)) = 1, \forall \varepsilon > 0, \forall x \in X_0$, 这里 $V(A, \varepsilon) = \{x \in X : d(x, A) < \varepsilon\}$ 。

A 称为 X_0 的极小吸引中心, 如果 A 是 X_0 的吸引中心, 但无 A 的真子集也是 X_0 的吸引中心。 X_0 的极小吸引中心记为 C_{X_0} 。当 $X_0 = \{x\} (x \in X)$ 时, 记 $C_{X_0} = C_x$, 称作 x 的极小吸引中心; 当 $X_0 = X$ 时, 记 $C_{X_0} = C(G)$, 称作 G 的极小吸引中心。

设 $x \in X, \delta_x$ 表示在 x 处的点测度。记 \mathcal{M}_x 为 $\{\frac{1}{|F|} \sum_{g \in F} \delta_{gx} : F \in \mathcal{F}(G)\}$ 在 $\mathcal{M}(X, G)$ 中的全体极限点的集合。令 $\mathcal{M}_{X_0} = \bigcup_{x \in X_0} \mathcal{M}_x$, 则 $\mathcal{M}_x, \mathcal{M}_{X_0} \subset \mathcal{M}(X, G)$ 。

定义 3 $X_0 \subset X$ 非空, 子集合 $A \subset X$ 称为 X_0 相

对于 \mathcal{M}_{X_0} 的测度中心, 如果

- (iv) $\bar{A} = A$;
- (v) $gA = A, \forall g \in G$;
- (vi) $\mu(A) = 1, \forall \mu \in \mathcal{M}_{X_0}$;
- (vii) 无 A 的真子集满足以上三个条件。

X_0 相对于 \mathcal{M}_{X_0} 的测度中心记为 M_{X_0} 。当 $X_0 = X$ 时, 记 $M_{X_0} = M(G)$, 称作 G 的测度中心。

周作领在文献 [8] 中给出了紧可度量空间上连续自映射的极小吸引中心的定义, 并证明了极小吸引中心与测度中心相等。本文将这一结果推广到顺从群作用的动力系统中。

定理 1 设 (X, G) 为可数无限顺从群 G 作用在紧度量空间 X 上的一 G -系统, X_0 为 X 的一个非空子集, 则 $M_{X_0} = C_{X_0}$ 。特别地, $C(G) = M(G)$ 。

2 主要结果的证明

下面的引理可见文 [6] 推论 6.1.2 或 [9] 定理 6.4 后面的注记。

引理 1 设 A 和 B 分别为 X 的开子集和闭子集, 又设 $\mu, \mu_n \in \mathcal{M}(X), n = 1, 2, \dots$, 且 μ_n 按弱*拓扑收敛于 μ , 则 $\liminf_{n \rightarrow \infty} \mu_n(A) \geq \mu(A); \limsup_{n \rightarrow \infty} \mu_n(B) \leq \mu(B)$ 。

引理 2 设 $A \in \mathfrak{B}(X), x \in X$, 则 $\underline{P}_x(A) + \underline{P}_x(X \setminus A) \leq 1; \underline{P}_x(A) + \bar{P}_x(X \setminus A) = 1$ 。

证明 作 $\mathcal{F}(G)$ 上的实函数 φ 和 ψ 为 $\varphi(F) = \frac{1}{|F|} \sum_{g \in F} \chi_A(gx)$ 及 $\psi(F) = \frac{1}{|F|} \sum_{g \in F} \chi_{X \setminus A}(gx)$ 。由定义得

$$\underline{P}_x(A) = \liminf_F \varphi(F) = \liminf_F \frac{1}{|F|} \sum_{g \in F} \chi_A(gx);$$

$$\bar{P}_x(X \setminus A) = \limsup_F \psi(F) = \limsup_F \frac{1}{|F|} \sum_{g \in F} \chi_{X \setminus A}(gx)$$

由于

$$\frac{1}{|F|} \sum_{g \in F} \chi_A(gx) + \frac{1}{|F|} \sum_{g \in F} \chi_{X \setminus A}(gx) = 1,$$

$$\forall F \in \mathcal{F}(G)$$

故

$$\underline{P}_x(A) + \bar{P}_x(X \setminus A) = 1$$

又由 $\underline{P}_x(X \setminus A) \leq \bar{P}_x(X \setminus A)$ 可知 $\underline{P}_x(A) + \underline{P}_x(X \setminus A) \leq \underline{P}_x(A) + \bar{P}_x(X \setminus A) = 1$ 。

引理 2 证毕。

给定 $\mu \in \mathcal{M}(X), \mu$ 的支撑 S_μ 定义为

$$S_\mu = \{x \in X : \mu(V(x, \varepsilon)) > 0, \forall \varepsilon > 0\}$$

引理 3 设 $X_0 \subset X$ 非空, 则 $M_{X_0} = \bigcup_{\mu \in \mathcal{M}_{X_0}} S_\mu$ 。

引理 3 的证明可由文 [8] 引理 3 的证明直接修改得到, 故略去其过程。

定理 1 的证明 沿用文 [8] 定理证明的思路。先证 M_{X_0} 是 X_0 的吸引中心, 即 $C_{X_0} \subset M_{X_0}$ 若不然, 存在 $\varepsilon > 0$ 以及 $x \in X_0$ 使得 $P_x(V(M_{X_0}, \varepsilon)) < 1$, 即

$$\liminf_F \frac{1}{|F|} \sum_{g \in F} \chi_{V(M_{X_0}, \varepsilon)}(gx) < 1$$

因此, 存在 $\{F_n\} \subseteq \mathcal{F}(G)$ 满足

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{|F_n|} \sum_{g \in F_n} \chi_{V(M_{X_0}, \varepsilon)}(gx) < 1$$

不妨设 (必要时取子序列) $\frac{1}{|F_n|} \sum_{g \in F_n} \delta_{gx}$ 弱 * 收敛到 $\mu \in \mathcal{M}_x$ 。则由引理 1 和引理 2 可知,

$$\mu(X - V(M_{X_0}, \varepsilon)) \geq$$

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{|F_n|} \sum_{g \in F_n} \delta_{gx}(X - V(M_{X_0}, \varepsilon)) =$$

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{|F_n|} \sum_{g \in F_n} \chi_{X - V(M_{X_0}, \varepsilon)}(gx) =$$

$$1 - \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{|F_n|} \sum_{g \in F_n} \chi_{V(M_{X_0}, \varepsilon)}(gx) > 0$$

与 $\mu(M_{X_0}) = 1$ 矛盾。

下证 $C_{X_0} \supset M_{X_0}$ 。

若不然, $M_{X_0} - C_{X_0}$ 是 M_{X_0} 的非空子集。取 $y \in M_{X_0} - C_{X_0}$, 则由 $y \notin C_{X_0}$ 且 C_{X_0} 闭可知, $\exists \delta > 0$ 使得 $V(y, \delta) \cap V(C_{X_0}, \delta) = \emptyset$ 。又由 $y \in M_{X_0} = \bigcup_{\mu \in \mathcal{M}_{X_0}} S_\mu$ (引理 3) 可知, $\exists \mu \in \mathcal{M}_{X_0}$ 使得 $S_\mu \cap V(y, \delta) \neq \emptyset$ 。因此由支撑的性质知 $\mu(V(y, \delta)) > 0$ 。

因为 $\mu \in \mathcal{M}_{X_0} = \bigcup_{x \in X_0} \mathcal{M}_x$, 故存在 $x \in X_0$ 和

$\{F_n\} \subseteq \mathcal{F}(G)$ 使得 $\mu_n := \frac{1}{|F_n|} \sum_{g \in F_n} \delta_{gx}$ 弱 * 收敛到 μ 。再由引理 1 和引理 2 可知,

$$P_x(V(C_{X_0}, \delta)) = \liminf_F \frac{1}{|F|} \sum_{g \in F} \chi_{V(C_{X_0}, \delta)}(gx) \leq$$

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{|F_n|} \sum_{g \in F_n} \chi_{V(C_{X_0}, \delta)}(gx) \leq$$

$$1 - \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{|F_n|} \sum_{g \in F_n} \chi_{X - V(C_{X_0}, \delta)}(gx) \leq$$

$$1 - \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{|F_n|} \sum_{g \in F_n} \chi_{V(y, \delta)}(gx) =$$

$$1 - \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{|F_n|} \sum_{g \in F_n} \delta_{gx}(V(y, \delta)) \leq$$

$$1 - \mu(V(y, \delta)) < 1$$

这与 C_{X_0} 的定义矛盾。定理证毕。

参考文献:

- [1] HUANG W, YE X, ZHANG G. Local entropy theory for a countable discrete amenable group action [J]. J Funct Anal, 2011, 261(4): 1028 - 1082.
- [2] 王苏华. Amenable 群作用的一维动力系统[D]. 苏州:苏州大学, 2009: 15 - 20.
- [3] LIANG B, YAN K. Topological pressure for sub-additive potentials of amenable group actions [J]. J Funct Anal, 2012, 262: 584 - 601.
- [4] HUAUG W, YE X, ZHANG G. Lowering topological entropy over subsets [J]. Ergodic Theory Dynam Systems, 2010, 30: 181 - 209.
- [5] LINDENSTRAUSS E. Pointwise theorems for amenable groups [J]. Invent Math, 2001, 146(2): 259 - 295.
- [6] 孙文祥. 遍历论[M]. 北京:北京大学出版社, 2012.
- [7] 周作领, 尹建东, 许绍元. 拓扑动力系统——从拓扑方法到遍历理论方法[M]. 北京:科学出版社, 2011.
- [8] 周作领. 测度中心与极小吸引中心[J]. 科学通报, 1992, 23: 2115 - 2118.
- [9] WALTERS P. An introduction to ergodic theory [M]. Berlin-Heidelberg-New York: Springer Verlag, 1981.